



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра вычислительных технологий и моделирования

Михеева Виктория Николаевна

Моделирование деформирования мембран из гиперупругого материала

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Научный руководитель:

д.ф.-м.н. Василевский Ю.В.

Москва, 2016

Оглавление

Введение	3
1. Свойства мягких тканей.	8
2. Метод TRBS. Случай материала Сен-Венана-Кирхгофа.	10
3. Случаи модели неогуковского материала и модели Гента.	15
4. Численные эксперименты.	19
Заключение.	37
Список литературы.	38

Введение.

Развитие медицинских и информационных технологий привело к постановкам новых задач в области биомедицинских приложений. Одним из таких приложений является моделирование хирургических вмешательств, для которого корректное решение моделирования деформирования мягких является одним из ключевых этапов.

Вопросами симуляции хирургических вмешательств начали заниматься в середине 1990-х годов. С тех пор появилось множество виртуальных хирургических симуляторов и тренажеров, что позволило улучшить обучение будущих хирургов (см. рис. 1, 2). Также появились медицинские «роботы», которые способствуют интенсивному развитию роботхирургии. При всех достижениях в области моделирования хирургических операций, моделирование деформирования живой ткани, чьи деформации при контакте с хирургическими инструментами имеет особую важность, не является до конца решенной задачей. Главным образом это связано с нелинейными свойствами самих мягких тканей и большими деформациями, которые они могут претерпевать во время хирургических вмешательств.



Рисунок 1. Пример системы обратной связи для хирургического симулятора [1].

Сложно переоценить роль компьютерного моделирования при решении задач биомеханики. Для имитационного моделирования хирургического вмешательства, точность предсказанной деформации мягких тканей и время вычисления являются двумя основными факторами. Если обобщить основные цели математического моделирования в соответствии с этими двумя критериями, то их можно схематично распределить так, как представлено на Рис. 3.

Для научных целей, например, при исследовании новых процедур или проектировании имплантов, точность деформации тканей куда важнее, чем время вычисления. С другой стороны, когда речь идет о планировании и прогнозировании реальной операции, вычисления должны проводиться в разы быстрее, при этом точность также остается важна. В рамках данной работы особый интерес представляет случай планирования операций, где должна быть найдена золотая середина между точностью и временем вычислений.

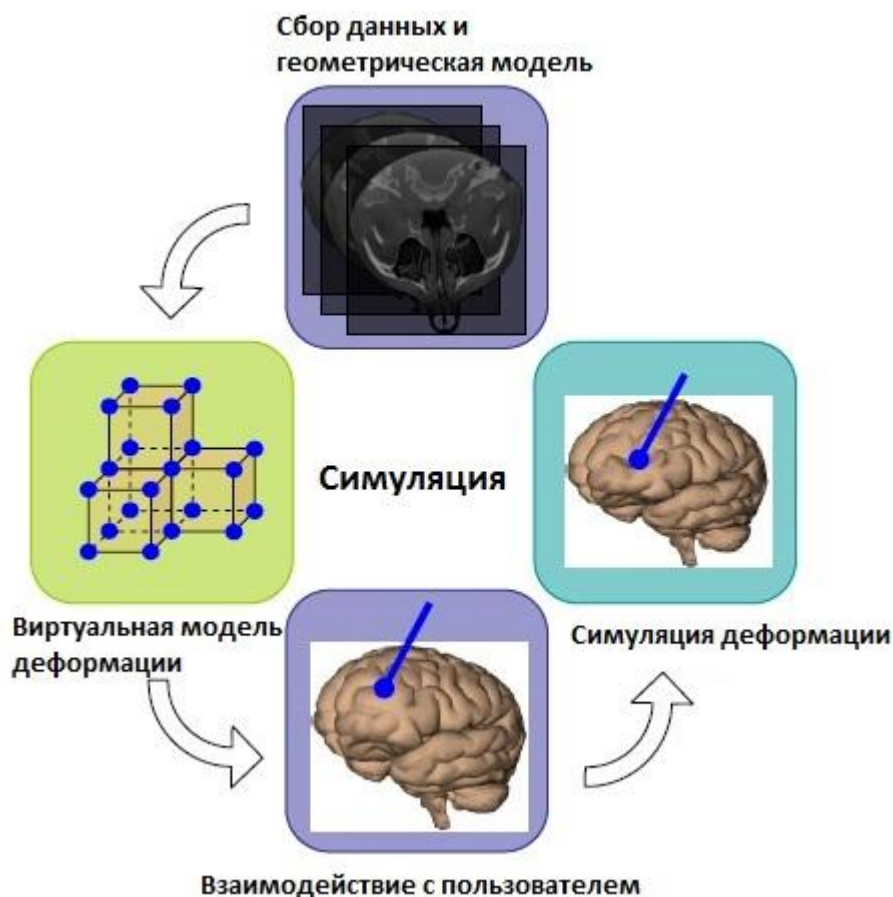


Рисунок 2. Модульная структура для хирургического симулятора [2].

Как было отмечено выше, поведение живых тканей при деформировании крайне нелинейно, и прямое применение классических законов механики сплошной среды в основном приводят к задачам, которые не решаются аналитически, а численные решения требуют значительных вычислительных и/или временных ресурсов. Поэтому, как правило, для моделирования деформирования живых тканей при хирургических операциях прибегают к сильному упрощению моделей, чтобы уменьшить сложность реализаций и оптимизировать эффективность вычислений.

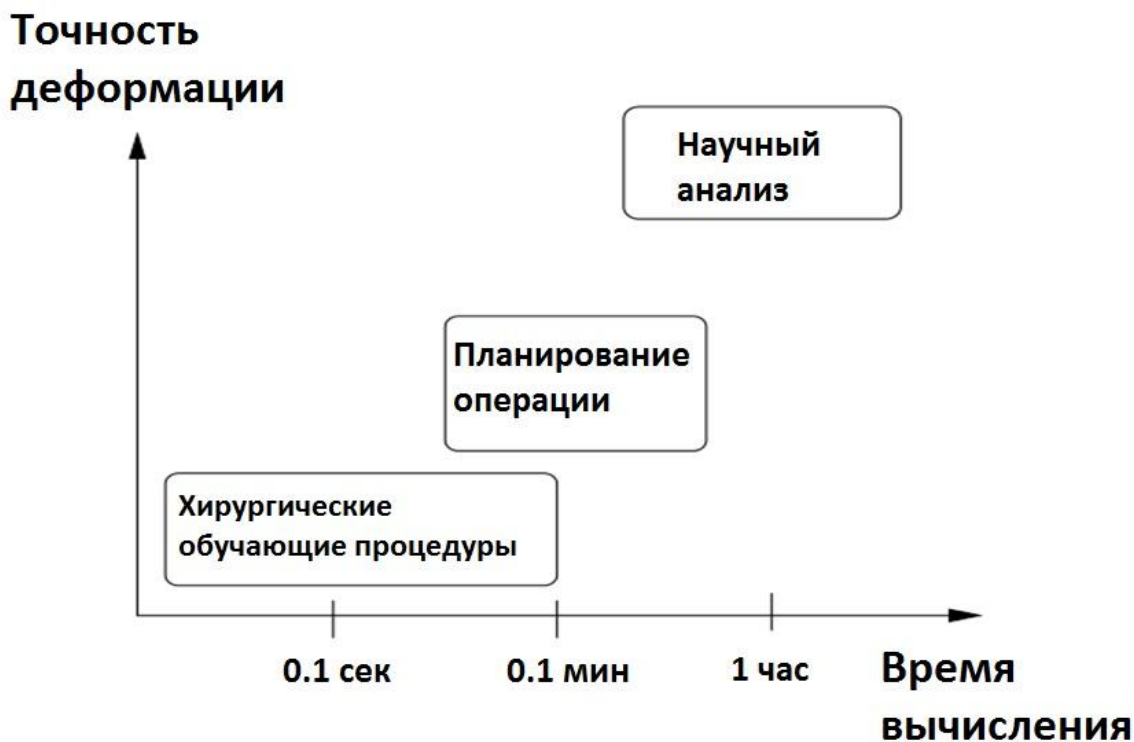


Рисунок 3. Требования к времени/точности при моделировании деформирования мягких тканей [3].

Среди основных подходов, используемых для хирургических симуляций, выделим пружинные модели (Mass-Spring models, MSM) и метод конечных элементов (МКЭ). Подробное описание и анализ достоинств и недостатков каждого из методов можно найти, например, в работе [2]. Главным образом, отметим, что практически все методы для симуляции хирургических вмешательств рассматривают живые ткани как линейно-упругие тела, что обеспечивает быстрое вычисление деформаций мягких тканей, поскольку линейная зависимость между приложенными силами и перемещением узлов приводит к очень эффективным вычислительным алгоритмам. Также, линейная упругость — это не только удобная математическая модель для деформируемых конструкций, но и вполне работающая гипотеза в ограниченном классе нагрузок. В самом деле, все гиперупругие материалы могут быть аппроксимированы линейными эластичными материалами при малых перемещениях. Поэтому часто принято считать, что материалы линейные упругие, когда наблюдаемые смещения менее 5% от характерного размера объекта. В случае, например, ткани печени, показано, что линейная упругость корректно описывает поведение ткани только для деформаций менее 0,2%. Однако, ткань или орган могут испытывать малые деформации не при всех видах операций. Например, при моделировании удаления желчного пузыря, когда печень перемещается совсем мало, использование соотношений линейной упругости для печени оправданно, но в случае имитации резекции печени или другой как-либо хирургической процедуры, применение гипотезы о линейной упругости может привести к качественно неправильным результатам.

При больших перемещениях уравнения линейной теории упругости для материала больше не соответствуют физической модели, и необходимо рассматривать конечные деформации, вместо бесконечно малых. Для демонстрации недостатков линейной упругости

при больших деформациях, приведем два примера [3]. В первом случае, при вращении упругого тела как твердого вокруг неподвижной точки, применение уравнений линейной теории упругости приводят к существенному изменению объема (рис. 4), что не соответствует действительности.

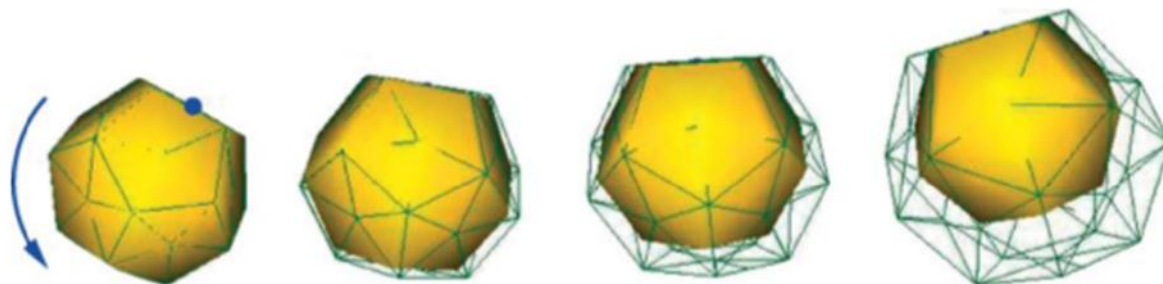


Рисунок 4. Вращение упругого тела как твердого тела вокруг неподвижной точки. Результат применения уравнений линейной теории упругости (каркас) [3].

К подобным нереалистичным деформациям приводит применение уравнений линейной теории упругости, например, при большом изгибе упругого цилиндра. На рис. 5 показан цилиндр, нижняя поверхность которого закреплена, и прикладывается изгибающая сила к центральной точке верхнего торца. В рамках линейной упругости, траектории вершин представляют собой прямые линии. На рис.5 стрелками обозначены траектории некоторых вершин. Подобные прямолинейные траектории узлов сетки приводят к нереалистичным деформациям.

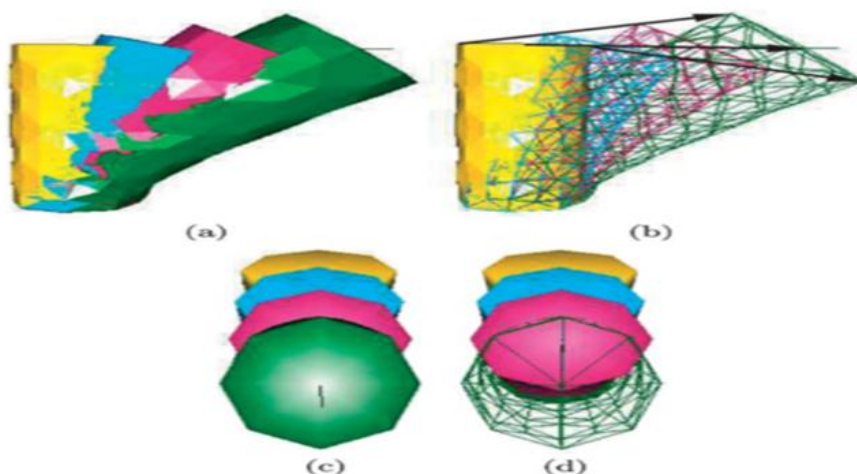


Рисунок 5. Решение о большом изгибе упругого цилиндра в рамках линейной теории упругости [3].

Таким образом, большинство современных медицинских систем моделирования основаны на геометрических представлениях анатомических структур, которые не учитывают их физической природы. Более корректное описание механического поведения мягких тканей позволит не только сделать более реалистичными существующие системы симуляций медицинских операций, но и значительно увеличить набор приложений для медицинской симуляции, например, планирование и имитация нейрохирургических и лапароскопических

операций.

Данная работа посвящена исследованию методов моделирования деформирования мягких тканей с учетом их нелинейного поведения и конечности деформаций, которые могут быть использованы при планировании операций. За основу был взят метод треугольных биквадратичных пружин (TRBS) [4], который будет описан в разделе 2. Данный метод прост в реализации, эффективен с точки зрения времени вычисления и учитывает нелинейные свойства материала. Используемая гиперупругая модель для тела – модель С.Венана-Кирхгоффа (St Venant Kirchhoff) – является одной из самых простых гиперупругих моделей и является просто своеобразным продолжением модели линейной упругости. В данной работе ставится целью расширить подход TRBS для других видов гиперупругих материалов, которые более корректно описывают поведение деформирования мягких тканей при хирургической симуляции.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 описаны основные механические свойства мягких тканей. Подход TRBS представлен в разделе 2. В разделе 3 приведены основные соотношения в случае неогуксовской модели материала и в случае модели Гента. Результаты численных экспериментов приведены в разделе 4.

1. Свойства мягких тканей.

Полное описание механического поведения живых тканей является непростой задачей в силу различных сложностей. Тем не менее, некоторые приближенные модели поведения тканей могут быть разработаны на основе имеющихся экспериментальных данных и могут быть использованы для прогнозирования результатов их деформирования. Эти модели характеризуются определяющими соотношениями (зависимость между напряжениями и деформациями в теле) и их следует рассматривать как некую идеализацию материала.

Живые ткани имеют свойства, которые очень отличаются от типичных конструкционных материалов. Они постоянно потребляют энергию и обмениваются веществами с окружающей их средой для поддержания основных метаболических процессов. Например, живые ткани могут самостоятельно адаптироваться и самостоятельно восстанавливаться, что способствует заживлению ран и расслаблению загруженной ткани. Часто ткани человеческого организма имеют сложную слоистую структуру, что говорит об анизотропии и неоднородности материалов.

Приведем основные свойства мягких тканей.

- Неоднородность и анизотропия. Как было сказано выше свойства ткани зачастую являются неоднородными и анизотропными. Например, кровеносный сосуд является сложной слоистой структурой коллагеновых и эластиновых волокон и гладкомышечных клеток, и его жесткость на растяжении в осевом и радиальном направлениях сильно различаются.

- Нелинейность материала. Как правило, кривая деформирования мягких тканей является нелинейной, и можно выделить три фазы деформирования (см. рис.6). В первой части (Фаза I) напряжение увеличивается экспоненциально с увеличением удлинения, т.е. материал существенным образом сопротивляется деформации. Во второй части (Фаза II), отношения довольно линейно. В третьей части (фаза III), зависимость носит нелинейный характер и появляется разрыв. Фаза I, как правило, физиологический диапазон, в котором обычно функционируют ткани.

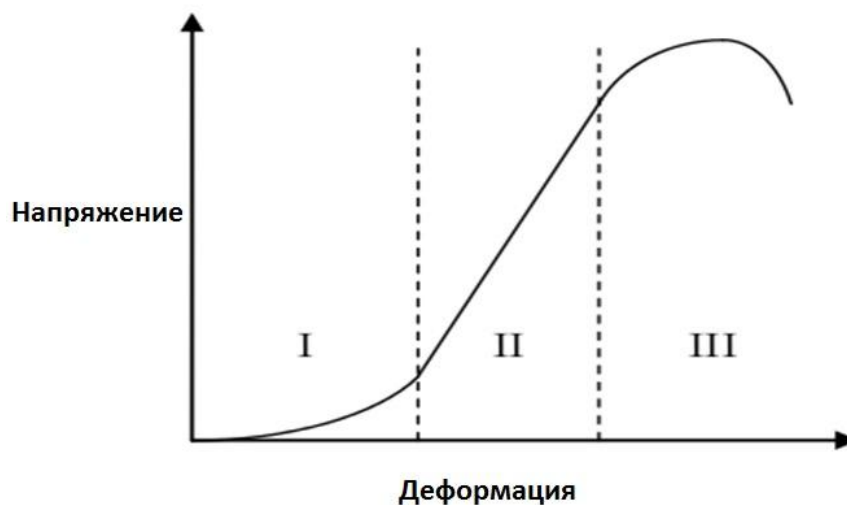


Рисунок 6. Схематическая кривая деформирования напряжение-деформация мягких тканей.

- Вязкоупругость и гистерезис. Вязкоупругие материалы - это те, для которых деформация зависит от истории нагрузки, и текущее напряжение является функцией всего процесса деформирования. После снятия нагрузки, материал восстанавливает свое исходное состояние, однако, кривая напряжение-деформация для нагрузки и разгрузки различается. Это явление известно как гистерезис

- Квазинесжимаемость. Материал называется несжимаемым, если его объем остается неизменным после деформации. Как правило, вода является основным компонентом мягких тканей, поэтому их принято рассматривать как квазинесжимаемый материал.

Учитывая сложность структур и поведения мягких биологических тканей, используют различные упрощения для математического моделирования деформирования мягких тканей. Отметим, что используемое определяющее соотношение зависит от исследуемой задачи, и скорее всего оно будет описывать поведение материалов лишь в хорошо известных классах нагрузок. Считается, что модели для резиноподобных материалов хорошо работают для описания механического поведения мягких биологических тканей. В данной работе будут использованы два определяющих соотношения, которые часто используются для моделирования мягких тканей: модель неогукковского материала и модель Гента.

2. Метод TRBS. Случай материала Сен-Венана-Кирхгофа.

Основным результатом работы [4] это обоснование связи между принципами механикой сплошной среды и представлением мембраны в виде набора нелинейных (биквадратичных) пружин для материала Сен-Венана-Кирхгофа. В случае малых деформаций, эти пружины эквивалентны обычным линейным пружинам, которые часто применяются при MSM. В работе [4] было показано, что TRBS метод эквивалентен МКЭ в случае треугольного линейного конечного элемента. При этом скорость вычисления узловых сил для метода TRBS в два раза быстрее, чем для МКЭ. Было показано, что в целом, метод TRBS более затратен по сравнению с MSM с точки зрения вычислений на 60 %.

Опишем основные моменты подхода TRBS, предложенного в [4] для случая материала Сен-Венана-Кирхгофа.

Рассмотрим двумерную компактную область $\Omega \in \mathbb{R}^2$, деформируемую в другой области $\Phi(\Omega)$. Материальная точка $X \in \Omega$ перемещается в новую позицию $\Phi(X) \in \Phi(\Omega)$, функция $\Phi(X)$ - функция деформации (см. рис. 7).

Мерой деформации является правый тензор Коши-Грина, который определяется как

$$C = \nabla \Phi^T \nabla \Phi, \quad (1)$$

или же соответствующий тензор деформации Грина-Лагранжа:

$$E = \frac{1}{2}(C - I). \quad (2)$$

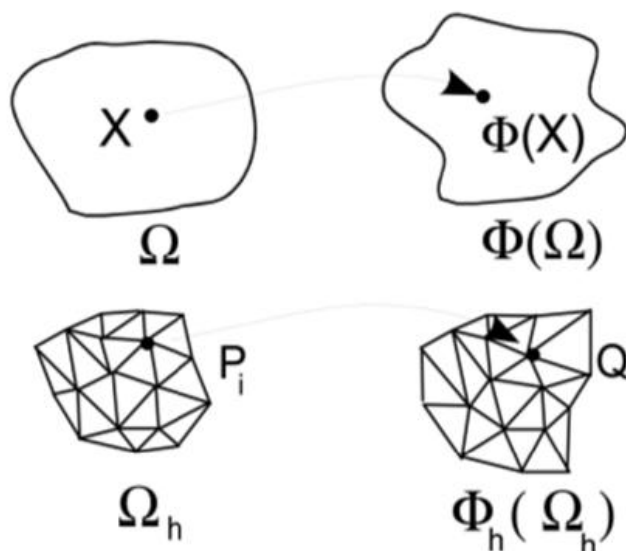


Рисунок 7. Области Ω и $\Phi(\Omega)$ до и после деформирования соответственно [4].

Определяющие соотношения для материала (связь между напряжениями и деформациями) определяется функцией энергией деформации. В случае изотропного материала Сен-Венана-Кирхгофа объемная плотность энергии деформации имеет вид:

$$W = \frac{\lambda}{2}(\text{tr}\mathbf{E})^2 + \mu \text{tr}\mathbf{E}^2, \quad (3)$$

где λ и μ являются коэффициентами Ламэ материала. Эти коэффициенты просто связаны с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона ν :

$$\lambda = \frac{E\nu}{1-\nu^2}, \quad \mu = \frac{E(1-\nu)}{2(1-\nu^2)}. \quad (4)$$

Модуль Юнга количественно характеризует жесткость материала, в то время как коэффициент Пуассона характеризует сжимаемость материала ($\nu = 1.0$ для двумерного несжимаемого материала).

Общая энергия мембраны W_Ω это сумма плотности энергии по всей области:

$$W_\Omega = \int_\Omega W(X) d\Omega = \int_\Omega \left(\frac{\lambda}{2}(\text{tr}\mathbf{E})^2 + \mu \text{tr}\mathbf{E}^2 \right) d\Omega. \quad (5)$$

Дискретизируем область Ω с помощью области Ω_h , состоящую из множества треугольников $\{T_i\}$, $i = \{1, \dots, p\}$ и множества вершин $\{P_i\}$, $i=\{1, \dots, n\}$. При этом будем рассматривать линейный треугольник для дискретизации поверхности, так как это простой двумерный элемент сплошной среды, приводящей к замкнутой форме для узловых сил и матриц жесткости. Для вычисления общей энергии деформации мембраны $W(\Omega_h)$, найдем необходимую энергию деформации для одного треугольника T_p , состоящего из вершин $\{P_1; P_2; P_3\}$, в его измененную позицию T_q с вершинами $\{Q_1; Q_2; Q_3\}$ (см. Рис 8). Введем следующие обозначения A_p (соответственно, A_q) площади треугольников T_p (соответственно, треугольника T_q), l_i (соответственно, L_i) его длина ребра, а α (соответственно, β) три угла.

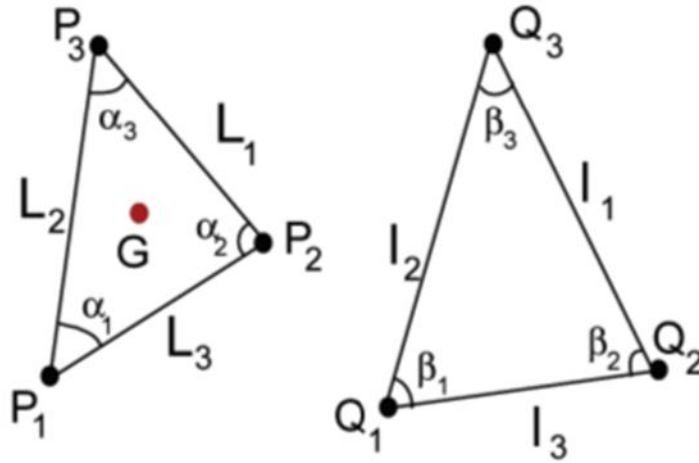


Рисунок 8. Треугольник до деформации (T_p) и после деформации (T_q).

Любая точка $X = (x,y)^T$ в треугольнике T_p (с вершинами P_1, P_2, P_3) может быть параметризована с помощью барицентрических координат $\eta_i(X)$:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1x} & P_{2x} & P_{3x} \\ P_{1y} & P_{2y} & P_{3y} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} |P| E. \quad (6)$$

Последнее соотношение можно переписать в следующем виде, считая, что

треугольник не вырождается:

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{1x} & D_{1y} & \eta_1^0 \\ D_{2x} & D_{2y} & \eta_2^0 \\ D_{3x} & D_{3y} & \eta_3^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = |D| X, \quad (7)$$

где

D_i - это форма вектор треугольника Tr , и

η_i^0 - барицентрические координаты произошедшие из системы координат.

Векторы D_i – направлены вдоль внутренней нормали (независимо от ориентации треугольника) и длины $\frac{1}{h_i}$, h_i - высота P_i (см. рис 9). Они могут быть вычислены с помощью следующего геометрического соотношения:

$$D_i = \frac{1}{2A_p} (P_{i \oplus 1} - P_{i \oplus 2})^\perp, \quad (8)$$

где $i \oplus j = ((i - 1 + j) \bmod 3) + 1$ и $X^\perp = (-y, x)^T$.

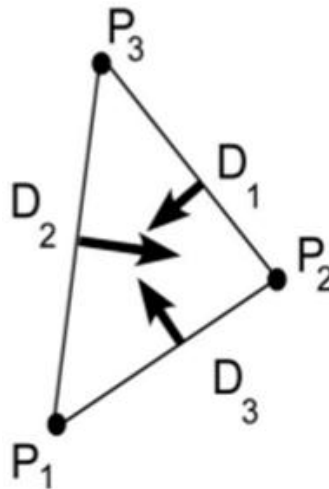


Рисунок 9. Векторы D_i для треугольника Tr .

Чтобы записать полную энергию мембраны $W(Tr)$, необходимую для деформации треугольника Tr в треугольник Tq , надо найти два инварианта trE и trE^2 . Градиент деформации постоянен для каждого треугольников Tr , что упрощает дальнейшие выражения.

Функция деформации $\Phi(X)$ на линейном треугольнике отображает точку $X \in Tr$ таким образом, что $\Phi(X)$ имеет те же барицентрические координаты в треугольнике Tq , как и в треугольнике Tr :

$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^3 \eta_i(X) Q_i = \sum_{i=1}^3 (\eta_i^0 + D_i \cdot X) Q_i \quad (9)$$

Найдем градиент деформации и правый тензор Коши-Грина:

$$\nabla\Phi = \left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_j} \right] = \sum_{i=1}^3 Q_i \otimes D_i, \quad (10)$$

$$C = \nabla\Phi^T \nabla\Phi = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (Q_i \cdot Q_j)(D_i \otimes D_j). \quad (11)$$

След тензора деформаций Грина $\text{tr}E$ просто получен из следа тензора C :

$$\text{tr}E = \frac{1}{2}(\text{tr}C - 2)$$

Легко получить:

$$\text{tr}C = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (Q_i \cdot Q_j)(D_i \cdot D_j). \quad (12)$$

Или же, последнюю формулу можно представить в следующем виде:

$$\text{tr}C = \frac{1}{2A_p} (l_1^2 \text{ctg}\alpha_1 + l_2^2 \text{ctg}\alpha_2 + l_3^2 \text{ctg}\alpha_3), \quad (13)$$

$$\text{tr}E = \frac{(l_1^2 - L_1^2) \text{ctg}\alpha_1 + (l_2^2 - L_2^2) \text{ctg}\alpha_2 + (l_3^2 - L_3^2) \text{ctg}\alpha_3}{2A_p} \quad (14)$$

$$\text{tr}E^2 = (\text{tr}E)^2 - 2\text{det}E = \frac{1 + 2\text{tr}E + 2(\text{tr}E)^2 - \text{det}C}{2}. \quad (15)$$

Заметим, что $\text{det}C = \frac{A_q}{A_p}$, тогда получим:

$$\text{tr}E^2 = \frac{1}{32A_p^2} \left[\sum_{i=1}^3 (\Delta^2 l_i)^2 (1 + 2\text{ctg}^2 \alpha_i) + \sum_{i \neq j} 2\Delta^2 l_i \Delta^2 l_j (2\text{ctg}\alpha_i \text{ctg}\alpha_j - 1) \right]. \quad (16)$$

Можно показать, что полная энергия деформации является функцией квадрата изменения длины ребер и углов треугольника и имеет следующий вид:

$$W_{\text{TRBS}}(T_p) = \int_{T_p} W(X) dX = A_p W(G). \quad (17)$$

где G это вся область.

$$W_{\text{TRBS}}(T_p) = \sum_{i=1}^3 \frac{(\Delta^2 l_i)^2 (2\text{ctg}^2 \alpha_i (\lambda + \mu) + \mu)}{64A_p} + \sum_{i \neq j} \frac{2\Delta^2 l_i \Delta^2 l_j (2\text{ctg}\alpha_i \text{ctg}\alpha_j (\lambda + \mu) - \mu)}{64A_p}. \quad (18)$$

Первый член энергии деформации мембраны можно интерпретировать как энергию трех растягивающихся биквадратичных пружин, которые препятствуют растяжения ребер, в то время как второй член можно рассматривать как три угловые биквадратичные пружины, которые препятствуют любые изменения в углах вершины. Таким образом, предыдущее уравнение можно переписать в следующем виде:

$$W_{\text{TRBS}}(T_p) = \sum_{i=1}^3 \frac{k_i^{T_p}}{4} (l_i^2 - L_i^2)^2 + \sum_{i \neq j} \frac{c_k^{T_p}}{2} (l_i^2 - L_i^2)(l_j^2 - L_j^2) \quad (19)$$

$$k_i^{T_p} = \frac{2\text{ctg}^2 \alpha_i (\lambda + \mu) + \mu}{16A_p} = \frac{E(2\text{ctg}^2 \alpha_i + 1 - \nu)}{16(1 - \nu^2)A_p}, \quad (20)$$

$$c_k^{T_p} = \frac{2ctg\alpha_i ctg\alpha_j (\lambda + \mu) - \mu}{16A_p} = \frac{E(2ctg\alpha_i ctg\alpha_j + \nu - 1)}{16(1 - \nu^2)A_p}. \quad (21)$$

где k_i и c_k это растяжение и угловая жесткость биквадратичной пружины. Отметим, что эти константы вычисляются для треугольника до деформации и не меняются при дальнейших расчетах.

Сила, приложенная в i -ом узле треугольника T_p в результате деформации, вычисляется как:

$$F_i^{TRBS}(T_p) = - \left(\frac{\partial W(T_p)}{\partial Q_i} \right)^T = \sum_{i \neq j} k_k^{T_p} \Delta^2 l_i (Q_j - Q_i) + \sum_{i \neq j} (c_j^{T_p} \Delta^2 l_i + c_i^{T_p} \Delta^2 l_j) (Q_j - Q_i) \quad (22)$$

где $\Delta^2 l_i = (l_i^2 - L_i^2)^2$.

Можно найти матрицу жесткости $[B_{ij}]$, которая описывает, как упругая сила изменяется по отношению к соседней позиции узла:

$$[B_{ij}^{TRBS}] = - \frac{\partial W_p}{\partial Q_i \partial Q_j} = \frac{\partial F_i^{TRBS}}{\partial Q_j} \quad (23)$$

В случае материала Сен-Венана-Кирхгофа:

$$\begin{aligned} [B_{ij}^{TRBS}] = & (k_k^{T_p} \Delta^2 l_k + c_j^{T_p} \Delta^2 l_i + c_i^{T_p} \Delta^2 l_j) I + \\ & + 2c_k^{T_p} (Q_i - Q_k) \otimes (Q_k - Q_j) + 2c_i^{T_p} (Q_i - Q_k) \otimes (Q_i - Q_j) + \\ & + 2c_j^{T_p} (Q_j - Q_i) \otimes (Q_j - Q_k) + 2k_k^{T_p} (Q_i - Q_j) \otimes (Q_i - Q_j) \end{aligned} \quad (24)$$

В итоге решение задачи о деформировании нелинейной мембраны сводится к решению системы дифференциальных уравнений, которые описывают движения i -ого узла треугольников:

$$\sum_{T_p \in S_p} F_i^{TRBS}(T_p) + R^b = m_i \frac{d^2 Q_i}{dt^2} \quad (25)$$

где F_i — силы, которые действуют на i -ый узел со стороны других, R^b — внешние силы, m_i — масса, S_p — множество всех треугольников.

Таким образом, задача нахождения деформированного состояния состоит в решении дифференциального уравнения относительно координат узлов Q_i .

3. Случаи модели неогукковского материала и модели Гента.

3.1. Модель неогукковского материала.

В случае неогукковской модели плотность энергии деформации имеет вид:

$$W = \frac{\mu}{2} (\text{tr}C - 2 + d(J^2 - 1) - 2(d + 1)(J - 1)). \quad (26)$$

Найдем выражения для узловых сил $F_i^{\text{TRBS}}(T_p)$ и матрицу жесткости $[B_{ij}]$ в случае неогукковского материала. Для этого вычислим соответствующие производные $\text{tr}C$ и J .

Учитывая, что длины ребер треугольника TQ можно выразить следующим образом

$$\begin{aligned} l_1 &= \sqrt{(Q_{2x} - Q_{3x})^2 + (Q_{2y} - Q_{3y})^2} \\ l_2 &= \sqrt{(Q_{3x} - Q_{1x})^2 + (Q_{3y} - Q_{1y})^2} \\ l_3 &= \sqrt{(Q_{1x} - Q_{2x})^2 + (Q_{1y} - Q_{2y})^2} \end{aligned} \quad (27)$$

то $\text{tr}C$ можно переписать как:

$$\begin{aligned} \text{tr}C &= \frac{1}{2A_p} \left([(Q_{2x} - Q_{3x})^2 + (Q_{2y} - Q_{3y})^2] \text{ctg}\alpha_1 + [(Q_{3x} - Q_{1x})^2 + (Q_{3y} - Q_{1y})^2] \text{ctg}\alpha_2 \right. \\ &\quad \left. + [(Q_{1x} - Q_{2x})^2 + (Q_{1y} - Q_{2y})^2] \text{ctg}\alpha_3 \right) \end{aligned}$$

Или так:

$$\text{tr}C = \frac{1}{2A_p} \left[(Q_{2x} - Q_{3x})^2 \text{ctg}\alpha_1 + (Q_{2y} - Q_{3y})^2 \text{ctg}\alpha_1 + (Q_{3x} - Q_{1x})^2 \text{ctg}\alpha_2 + \right. \\ \left. (Q_{3y} - Q_{1y})^2 \text{ctg}\alpha_2 + (Q_{1x} - Q_{2x})^2 \text{ctg}\alpha_3 + (Q_{1y} - Q_{2y})^2 \text{ctg}\alpha_3 \right] \quad (28)$$

Теперь продифференцируем $\text{tr}C$ по всем точкам:

$$\frac{\partial \text{tr}C}{\partial Q_1} = \left(\begin{array}{l} \frac{1}{A_p} [(Q_{1x} - Q_{3x}) \text{ctg}\alpha_2 + (Q_{1x} - Q_{2x}) \text{ctg}\alpha_3] \\ \frac{1}{A_p} [(Q_{1y} - Q_{3y}) \text{ctg}\alpha_2 + (Q_{1y} - Q_{2y}) \text{ctg}\alpha_3] \end{array} \right)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{tr}C}{\partial Q_1} &= \frac{1}{A_p} [(Q_1 - Q_3) \text{ctg}\alpha_2 + (Q_1 - Q_2) \text{ctg}\alpha_3] \\ \frac{\partial \text{tr}C}{\partial Q_2} &= \frac{1}{A_p} [(Q_2 - Q_3) \text{ctg}\alpha_1 + (Q_2 - Q_1) \text{ctg}\alpha_3] \\ \frac{\partial \text{tr}C}{\partial Q_3} &= \frac{1}{A_p} [(Q_3 - Q_2) \text{ctg}\alpha_1 + (Q_3 - Q_1) \text{ctg}\alpha_2] \end{aligned} \quad (29)$$

Теперь возьмем вторую производную:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \text{trC}}{\partial Q_1 \partial Q_1} &= \frac{\text{ctg}\alpha_2 + \text{ctg}\alpha_3}{A_p} I; & \frac{\partial^2 \text{trC}}{\partial Q_1 \partial Q_2} &= \frac{-\text{ctg}\alpha_3}{A_p} I; & \frac{\partial^2 \text{trC}}{\partial Q_1 \partial Q_3} &= \frac{-\text{ctg}\alpha_2}{A_p} I \\
\frac{\partial^2 \text{trC}}{\partial Q_2 \partial Q_1} &= \frac{-\text{ctg}\alpha_3}{A_p} I; & \frac{\partial^2 \text{trC}}{\partial Q_2 \partial Q_2} &= \frac{\text{ctg}\alpha_1 + \text{ctg}\alpha_3}{A_p} I; & \frac{\partial^2 \text{trC}}{\partial Q_2 \partial Q_3} &= \frac{-\text{ctg}\alpha_1}{A_p} I \\
\frac{\partial^2 \text{trC}}{\partial Q_3 \partial Q_1} &= \frac{-\text{ctg}\alpha_2}{A_p} I; & \frac{\partial^2 \text{trC}}{\partial Q_3 \partial Q_2} &= \frac{-\text{ctg}\alpha_1}{A_p} I; & \frac{\partial^2 \text{trC}}{\partial Q_3 \partial Q_3} &= \frac{\text{ctg}\alpha_1 + \text{ctg}\alpha_2}{A_p} I
\end{aligned} \quad (30)$$

Площадь треугольника вычисляется:

$$A_q = \frac{1}{2} [(Q_{1x} - Q_{3x})(Q_{2y} - Q_{3y}) - (Q_{1y} - Q_{3y})(Q_{2x} - Q_{3x})] \quad (31)$$

Берем производную от A_q :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial A_q}{\partial Q_1} &= \frac{1}{2} [Q_{2y} - Q_{3y}; Q_{3x} - Q_{2x}] \\
\frac{\partial A_q}{\partial Q_2} &= \frac{1}{2} [Q_{3y} - Q_{1y}; Q_{1x} - Q_{3x}] \\
\frac{\partial A_q}{\partial Q_3} &= \frac{1}{2} [Q_{1y} - Q_{2y}; Q_{2x} - Q_{1x}]
\end{aligned} \quad (32)$$

И вторую производную:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{1x} \partial Q_{1x}} &= 0; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{1x} \partial Q_{2x}} &= 0; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{1x} \partial Q_{3x}} &= 0; \\
\frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{1x} \partial Q_{1y}} &= 0; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{1x} \partial Q_{2y}} &= \frac{1}{2}; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{1x} \partial Q_{3y}} &= -\frac{1}{2}; \\
\frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{1y} \partial Q_{1x}} &= 0; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{1y} \partial Q_{2x}} &= -\frac{1}{2}; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{1y} \partial Q_{3x}} &= \frac{1}{2}; \\
\frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{1y} \partial Q_{1y}} &= 0; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{1y} \partial Q_{2y}} &= 0; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{1y} \partial Q_{3y}} &= 0; \\
\frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{2x} \partial Q_{1x}} &= 0; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{2x} \partial Q_{2x}} &= 0; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{2x} \partial Q_{3x}} &= 0; \\
\frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{2x} \partial Q_{1y}} &= -\frac{1}{2}; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{2x} \partial Q_{2y}} &= 0; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{2x} \partial Q_{3y}} &= \frac{1}{2}; \\
\frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{2y} \partial Q_{1x}} &= \frac{1}{2}; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{2y} \partial Q_{2x}} &= 0; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{2y} \partial Q_{3x}} &= -\frac{1}{2};
\end{aligned} \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{2y} \partial Q_{1y}} = 0; \quad \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{2y} \partial Q_{2y}} = 0; \quad \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{2y} \partial Q_{3y}} = 0;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{3x} \partial Q_{1x}} &= 0; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{3x} \partial Q_{2x}} &= 0; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{3x} \partial Q_{3x}} &= 0; \\ \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{3x} \partial Q_{1y}} &= \frac{1}{2}; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{3x} \partial Q_{2y}} &= -\frac{1}{2}; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{3x} \partial Q_{3y}} &= 0; \\ \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{3y} \partial Q_{1x}} &= -\frac{1}{2}; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{3y} \partial Q_{2x}} &= \frac{1}{2}; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{3y} \partial Q_{3x}} &= 0; \\ \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{3y} \partial Q_{1y}} &= 0; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{3y} \partial Q_{2y}} &= 0; & \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_{3y} \partial Q_{3y}} &= 0; \end{aligned}$$

Теперь с учетом того, что $J = \frac{A_q}{A_p}$, рассчитаем силу деформации:

$$F_{ix} = -\frac{\partial W}{\partial Q_{ix}} = -\frac{\mu}{2} \left[\frac{\partial \text{tr} C}{\partial Q_{ix}} + d \frac{\partial (J^2 - 1)}{\partial Q_{ix}} - 2(d+1) \frac{\partial (J-1)}{\partial Q_{ix}} \right]$$

$$F_{ix} = -\frac{\mu}{2} \left[\frac{\partial \text{tr} C}{\partial Q_{ix}} + 2 \left(\frac{d(J-1) - 1}{A_p} \right) \frac{\partial A_q}{\partial Q_{ix}} \right] \quad (34)$$

$$F_{iy} = -\frac{\partial W}{\partial Q_{iy}} = -\frac{\mu}{2} \left[\frac{\partial \text{tr} C}{\partial Q_{iy}} + 2 \left(\frac{d(J-1) - 1}{A_p} \right) \frac{\partial A_q}{\partial Q_{iy}} \right]$$

$$F_i = \begin{bmatrix} F_{ix} \\ F_{iy} \end{bmatrix}$$

И матрица жесткости:

$$[B_{ij}] = -\frac{\partial W_p}{\partial Q_i \partial Q_j} = \frac{\partial F_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial Q_i \partial Q_j}$$

$$[B_{ij}] = \frac{\mu}{2} \left[\frac{\partial^2 \text{tr} C}{\partial Q_i \partial Q_j} + \left(\frac{2d}{A_p^2} \cdot \frac{\partial A_q}{\partial Q_j} \right) \frac{\partial A_q}{\partial Q_i} + \left(\frac{2d A_q}{A_p^2} - \frac{2d+2}{A_p} \right) \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_i \partial Q_j} \right] \quad (35)$$

3.2. Модель Гента.

В случае модели Гента, имеем:

$$W = -\frac{\mu}{2} J_m \ln \left(1 - \frac{\text{tr}C - 2}{J_m} \right) + \frac{\mu}{2} [d(J^2 - 1) - 2(d + 1)(J - 1)], \quad (36)$$

Где μ , J_m – константы материала. Аналогично случаю неогукковского материала, получим

$$F_i = -\frac{\partial W}{\partial Q_i} = -\frac{\mu}{2} \left[J_m \cdot \frac{\frac{\partial \text{tr}C}{\partial Q_i}}{J_m + 2 - \text{tr}C} + \frac{2}{A_p} [d(J - 1) - 1] \frac{\partial A_q}{\partial Q_i} \right] \quad (37)$$

$$[B_{ij}] = -\frac{\partial W_p}{\partial Q_i \partial Q_j} = \frac{\partial F_i}{\partial Q_j} = \frac{\partial^2 F}{\partial Q_i \partial Q_j}$$

$$[B_{ij}] = -\frac{\mu}{2} \left\{ \frac{J_m \frac{\partial^2 \text{tr}C}{\partial Q_i \partial Q_j}}{(J_m + 2 - \text{tr}C)} - \frac{J_m \frac{\partial \text{tr}C}{\partial Q_i} \frac{\partial \text{tr}C}{\partial Q_j}}{(J_m + 2 - \text{tr}C)^2} + \frac{2d}{A_p^2} \cdot \frac{\partial A_q}{\partial Q_j} \cdot \frac{\partial A_q}{\partial Q_i} + \frac{2}{A_p} (d(J - 1) - 1) \frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_i \partial Q_j} \right\} \quad (38)$$

где $\text{tr}C$, $\frac{\partial \text{tr}C}{\partial Q_i}$, $\frac{\partial A_q}{\partial Q_i}$, $\frac{\partial^2 A_q}{\partial Q_i \partial Q_j}$, определяются по формулам (28), (29), (32), (33), A_p – площадь первого треугольника, определяется по формуле (31).

4. Численные эксперименты

4.1. Случай материал Сен-Венана-Кирхгофа

В случае материала Сен-Венана-Кирхгофа была рассмотрено две задачи.

Первая задача взята из работы [4] и состоит в описании деформации квадратной мембраны под действием давления на верхнем торце (см. рис. 10), при это вертикальные перемещения точек нижнего края мембраны равны 0.

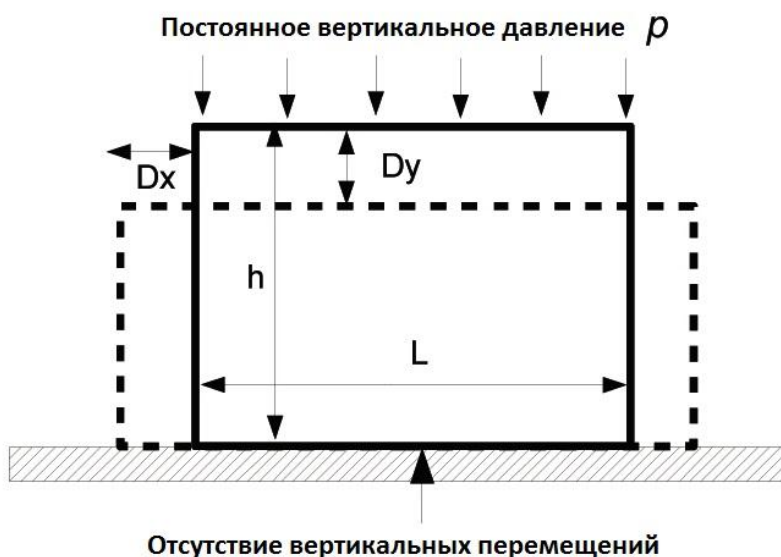


Рисунок 10. Задача о деформации мембраны под действием давления [4].

В данном случае рассматривается статическая задача, поэтому (25) сводится к решению нелинейных уравнений:

$$F(x) = \sum_{T_p \in S_p} F_i^{TRBS}(T_p) + R^b = 0, \quad (39)$$

которая решается методом Ньютона:

$$F(x_{k+1}) = 0;$$

$$F(x_{k+1}) = F(x_k) + F'(x_k) \cdot (x_{k+1} - x_k) \approx 0$$

$$[B_{ij}] \cdot \Delta x_k \approx -F(x_k). \quad (40)$$

На каждом шаге метода Ньютона решалась система линейных уравнений (40) с помощью пакета UMFPACK и ani2d. Мы получали новое смещение Δx_k , на базе которого снова пересчитывалась матрица и правая часть. Но при этом большая часть констант (такие как: $k_i^{T_p}$ (20), $c_i^{T_p}$ (21)) которая использовалась для построения матрицы жесткости и правой

части вычислялась всего один раз. Еще можно заметить, что матрица будет симметричная, поэтому вычислять можно только половину матрицы, и так как ненулевые блоки матрицы жесткости будут стоять только на позициях, соответствующих ребрам треугольников сетки, она будет сильно разреженная, и для экономии памяти, мы храним ее в csr-формате.

Для констант материалов $E = 1$, $\nu = \frac{1}{3}$ и для сеток размеров 8 – 800 треугольников была решена система уравнений (39), результаты показаны на рис. 11-12.

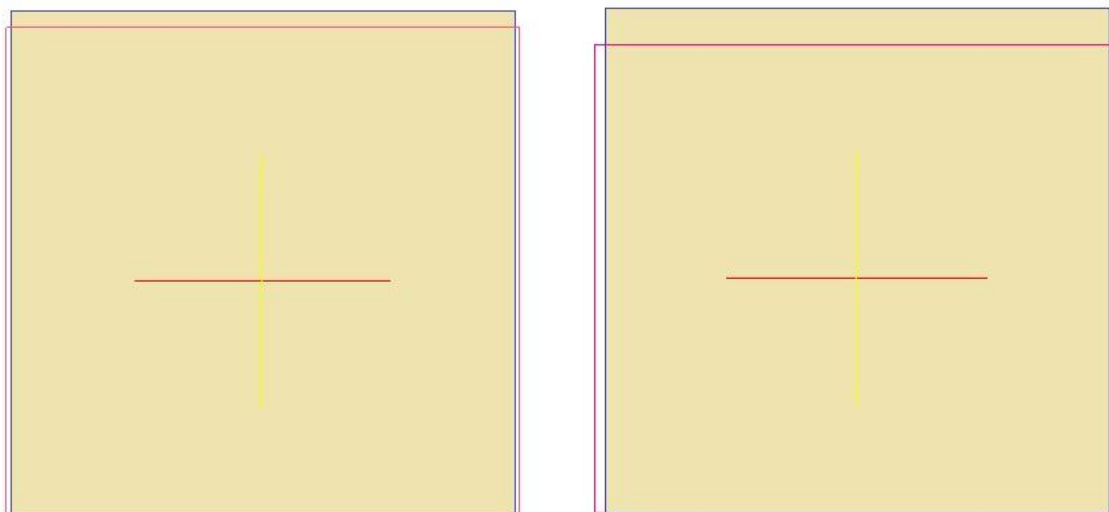


Рисунок 11. Давление $0.1H$ и $0.2H$ на квадратную мембрану.

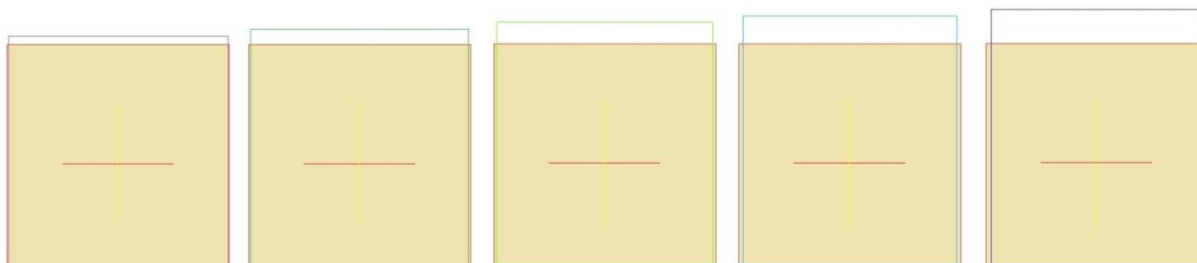


Рисунок 12. Растяжение $0.1H$, $0.2H$, $0.3H$, $0.4H$, $0.5H$ квадратной мембраны.

На рис. 13 представлена зависимость силы, приложенной к верхней грани мембраны, и продольной деформации e_x от величины поперечной деформации e_y для материала Сен-Венана-Кирхгофа и линейно-упругого материала. Как видно, нелинейный материал ведет себя более жестко по сравнению с линейным, и результаты, представленные на рис. 13, хорошо согласуются с соответствующим графиком работы [4].

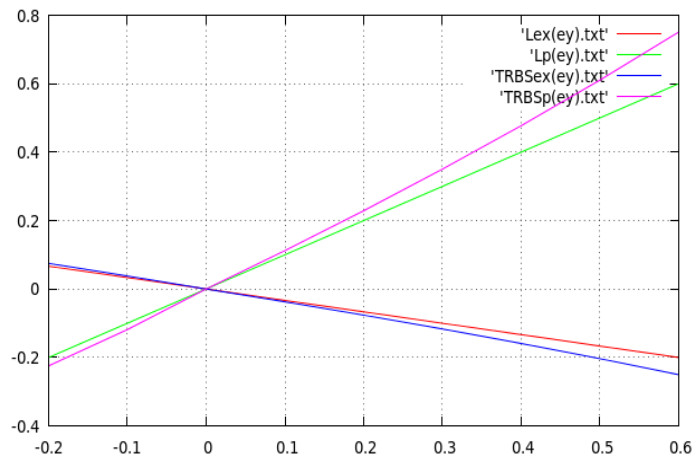


Рисунок 13. Зависимость изменения формы квадратной мембраны от силы давления. Ось абсцисс – давление. Для линейно-упругого материала $\varepsilon_y = E\rho$, $\varepsilon_x = E\nu\rho$ [4], а для материала Сен-Венана-Кирхгофа $\varepsilon_y = \frac{Dx}{L}$, $\varepsilon_x = \frac{Dy}{h}$, [4], где Dx , Dy , L , h показаны на рис. 10, $\rho(\varepsilon_y) \approx E\varepsilon_y$, $\varepsilon_x(\varepsilon_y) = -\nu\varepsilon_y$

14). **Вторая задача** является задачей о двухосном растяжении упругой мембраны (см. рис.

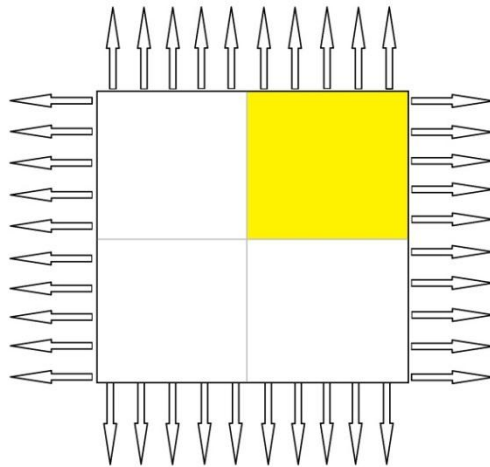


Рисунок 14. Двухосное растяжение мембраны.

В силу симметрии задачи, рассмотрим только четверть мембраны, для которой горизонтальные перемещения левой грани и вертикальные перемещения нижней грани равны нулю (см. рис. 15).

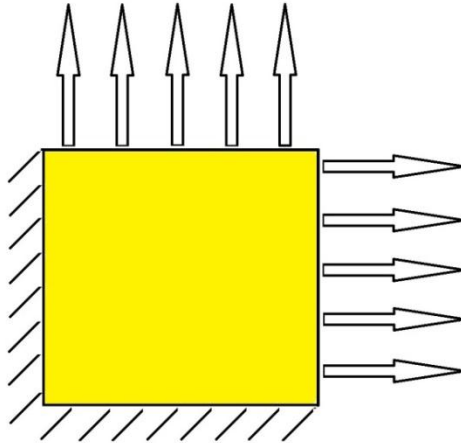


Рисунок 15. Растяжение четверти мембраны, т.е. здесь правая сторона тянется вправо, верхняя – вверх, левая не изменяется горизонтально (перемещения вдоль оси $x = 0$), а нижняя – вертикально (перемещения вдоль оси $y = 0$).

Результаты решения для задачи о двухосном растяжении мембраны для сеток 32, 128, 288 треугольников представлены на рис. 16-18, при этом константы материала $E = 1$, $\nu = \frac{1}{3}$, растяжение с силой 0,1Н, 0,3Н и 0,5Н.

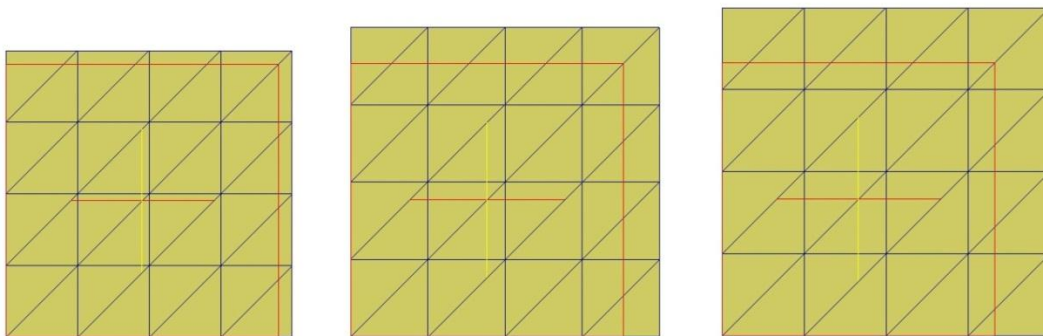


Рисунок 16. Материал SVK. Сетка 32 треугольника. Красный квадрат – это первоначальное состояние мембраны, к которому приложена сила, растягивающая его вправо и вверх. На первом квадрате приложена сила 0,1Н, на втором – 0,3Н, на третьем – 0,5Н.

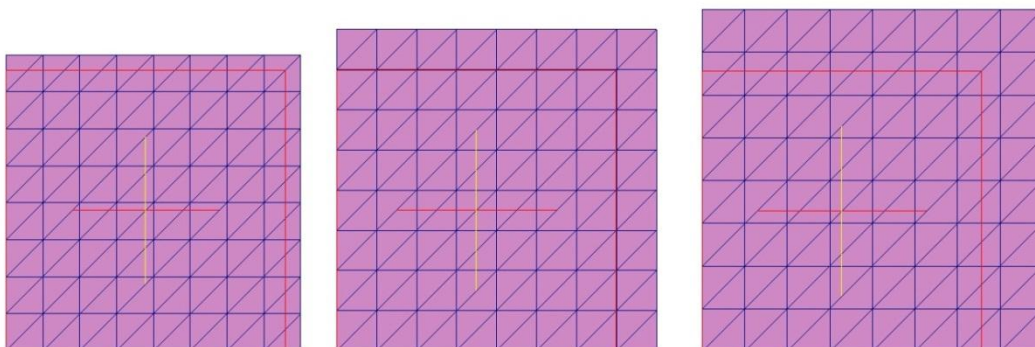


Рисунок 17. Материал SVK. Сетка 128 треугольников. Красный квадрат – это первоначальное состояние мембраны, к которому приложена сила, растягивающая его вправо и вверх. На первом квадрате приложена сила $0,1H$, на втором – $0,3H$, на третьем – $0,5H$.

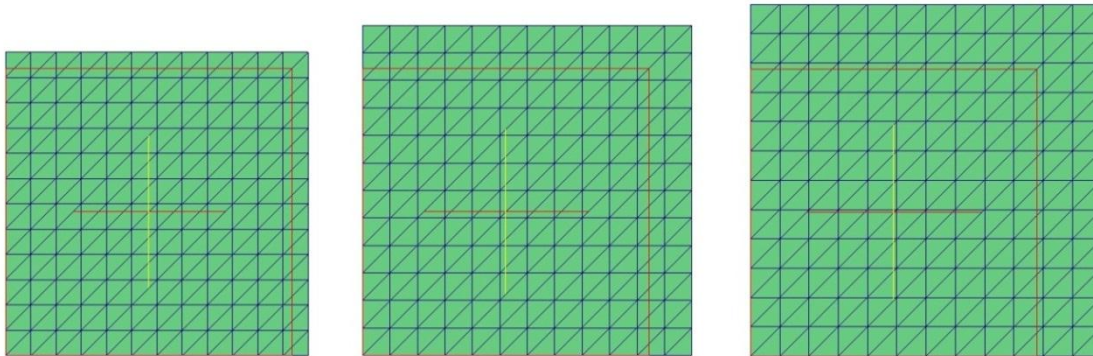


Рисунок 18. Материал SVK. Сетка 288 треугольников. Красный квадрат – это первоначальное состояние мембраны, к которому приложена сила, растягивающая его вправо и вверх. На первом квадрате приложена сила $0,1H$, на втором – $0,3H$, на третьем – $0,5H$.

И все растяжения сразу на одном рис. 19, чтобы можно было сравнить:

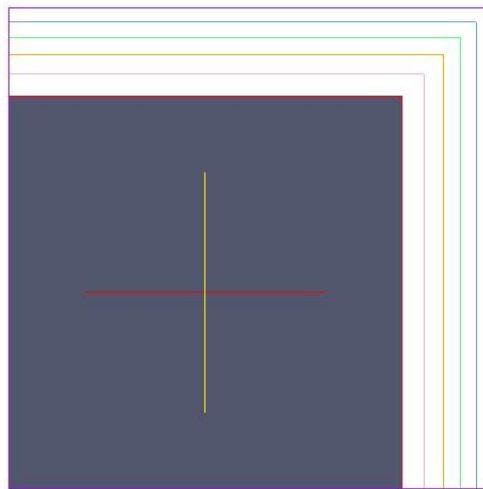


Рисунок 19. Материал SVK. Серый квадрат – это первоначальное состояние мембраны, к которому приложена сила, растягивающая его вправо и вверх. Растяжения $0,1H, 0,2H, 0,3H, 0,4H$ и $0,5H$.

4.2. Случай неогукковского материала и модели Гента

Были рассмотрены задачи о двухосном растяжении мембраны в случае неогукковского материала и модели материала Гента.

Для неогукковского материала константы материала $d = 1$, $\mu = 280 \frac{H}{\text{см}^2}$. Размеры мембраны 0.04×0.04 м, силы прикладывались от 10Н до 30Н. Вычисления проводились на сетках 128, 392, 648 треугольников. На рис.20-21 показаны результаты растяжения нелинейных мембран в случае неогукковского материала.

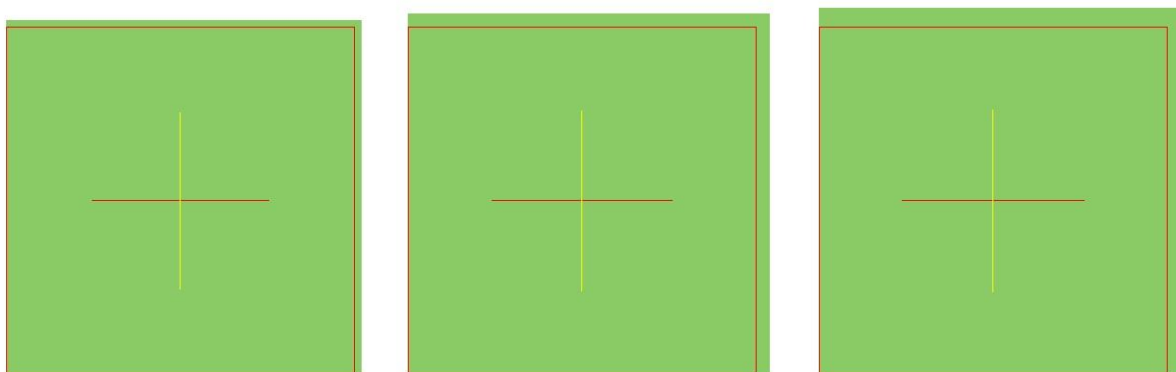


Рисунок 20. Неогукковский материал. Красный квадрат – это первоначальное состояние мембраны, к которому приложена сила, растягивающая его вправо и вверх. На первом квадрате приложена сила 10Н, на втором – 20Н, на третьем – 30Н.

И чтобы сравнить эти растяжения, посмотрим их все на одном рис. 21 для неогукковского материала.

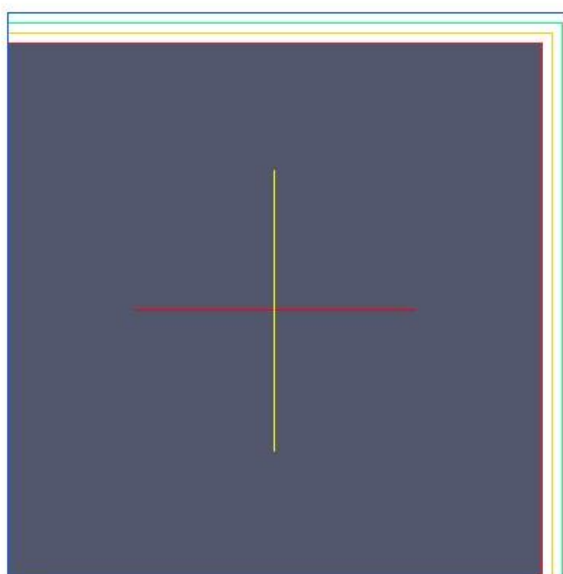


Рисунок21. Неогукковский материал. Серый квадрат – это первоначальное состояние

мембраны, к которому приложена сила, растягивающая его вправо и вверх. Растяжения 10Н, 20Н и 30Н.

Для модели Гента – $J_m = 2.3$, $d = 1$, $\mu = 280 \frac{H}{cm^2}$. Размеры мембраны 0.04x0.04 м, силы прикладывались от 10Н до 30Н. Вычисления проводились на сетках 128, 392, 648 треугольников. На рис.22 показаны результаты о растяжении нелинейных мембран

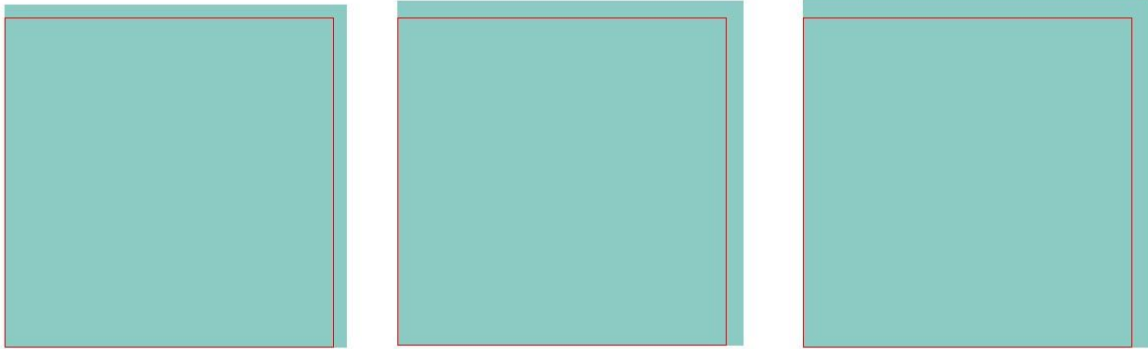


Рисунок 22. Модель Гента. Красный квадрат – это первоначальное состояние мембраны, к которому приложена сила, растягивающая его вправо и вверх. На первом квадрате приложена сила 10Н, на втором – 20Н, на третьем – 30Н.

И чтобы сравнить эти растяжения, посмотрим их все на одном рис. 23 для модели Гента.

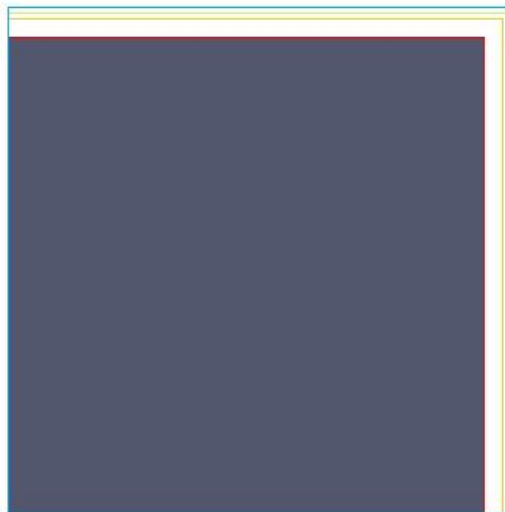


Рисунок 23. Модель Гента. Серый квадрат – это первоначальное состояние мембраны, к которому приложена сила, растягивающая его вправо и вверх. Растяжения 10Н, 20Н и 30Н.

4.3. Сравнение с аналитическими данными.

Напряжения Коши σ :

$$\sigma = \frac{1}{J} F S F^T, S = 2 \frac{\partial W}{\partial C}$$

Где $F = \nabla \Phi$ - градиент деформаций; W – функция энергии деформации, C, E определяются из (1), (2).

Тогда для неогуковского материала:

$$\sigma = \frac{1}{J} \frac{\mu}{2} (F F^T + [dJ^2 - (d+1)J]I)$$

И для модели Гента:

$$\sigma = \frac{1}{J} \frac{\mu}{2} \left(\frac{J_m}{J_m - (\text{tr}(C) - 2)} F F^T + [dJ^2 - (d+1)J]I \right)$$

В пластинке напряжения при двухосном растяжении μ должны иметь следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix},$$

Где, согласно аналитическому решению $\sigma_1 = \frac{p_1}{\lambda_1}, \sigma_2 = \frac{p_2}{\lambda_2}$

Где λ_1 – длина пластинки после деформации / длину пластинки до деформации,
 λ_2 – ширина пластинки после деформации / ширину пластинки до деформации,
 p_1, p_2 – силы вдоль x, y .

Приведем некоторые численные сравнения с аналитическими результатами для различных коэффициентов d, μ , значений давления p_1, p_2 и различных сеток.

Неогуковская модель.

$d = 10, \mu = 2800, p_1 = 1 \text{ Н/см}^2, p_2 = 1 \text{ Н/см}^2, \sigma_1 = 1.000059233, \sigma_2 = 1.999780051$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	0.8887971687	1.777876578
392	0.9332322114	1.866775596
648	0.9472642348	1.894849073

$d = 10, \mu = 2800, p_1 = 3 \text{ Н/см}^2, p_2 = 8 \text{ Н/см}^2, \sigma_1 = 3.000990941, \sigma_2 = 7.995870549$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	2.665375183	7.113314838
392	2.798576113	7.469096423
648	2.840638221	7.581450797

$d = 10, \mu = 2800, p_1 = 10 \text{ Н/см}^2, p_2 = 5 \text{ Н/см}^2, \sigma_1 = 9.99449888, \sigma_2 = 5.001483062$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	8.891362404	4.442150502
392	9.336060626	4.66413753
648	9.476494222	4.734236312

$d = 100, \mu = 2800, p1 = 1\text{Н/см}^2, p2 = 2\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 1.000082074, \sigma_2 = 1.999825717$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	0.8888162121	1.777914677
392	0.9332532065	1.8668176
648	0.9472858661	1.89489235

$d = 100, \mu = 2800, p1 = 3\text{Н/см}^2, p2 = 8\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 3.001242311, \sigma_2 = 7.996539736$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	2.66558449	7.113873878
392	2.798806862	7.469712782
648	2.840875959	7.582085838

$d = 100, \mu = 2800, p1 = 10\text{Н/см}^2, p2 = 5\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 9.995639432, \sigma_2 = 5.002054305$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	8.892315231	4.442626158
392	9.337111141	4.664661912
648	9.477576577	4.734776573

$d = 1000, \mu = 2800, p1 = 1\text{Н/см}^2, p2 = 2\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 1.000084358, \sigma_2 = 1.999830284$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	0.8888181142	1.777918485
392	0.9332553137	1.866821809
648	0.9472880285	1.894896677

$d = 1000, \mu = 2800, p1 = 3\text{Н/см}^2, p2 = 8\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 3.001267454, \sigma_2 = 7.99660667$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	2.665605428	7.113929798
392	2.798829941	7.469774431
648	2.840899728	7.582149347

$d = 1000, \mu = 2800, p1 = 10\text{Н/см}^2, p2 = 5\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 9.995753523, \sigma_2 = 5.002111447$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	8.89241054	4.442673737
392	9.33721622	4.664714365
648	9.477684851	4.73483062

$d = 10, \mu = 280, p1 = 1\text{Н/см}^2, p2 = 2\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 1.000594347, \sigma_2 = 1.99779835$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	0.8879708415	1.77876894
392	0.9323211342	1.867759617
648	0.9463255341	1.895862973

$d = 10, \mu = 280, p1 = 3\text{Н/см}^2, p2 = 8\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 3.010025661, \sigma_2 = 7.958557736$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	2.653708487	7.133390813
392	2.785710937	7.491245019
648	2.827382353	7.604275355

$d = 10, \mu = 280, p1 = 10\text{Н/см}^2, p2 = 5\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 9.944715872, \sigma_2 = 5.015085691$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	8.914022907	4.42139831
392	9.361068297	4.641251704
648	9.502267626	4.710654887

$d = 100, \mu = 280, p1 = 1\text{Н/см}^2, p2 = 2\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 1.000822959, \sigma_2 = 1.998254023$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	0.88816089	1.779150249
392	0.932530639	1.86818003
648	0.9465413795	1.896296132

$d = 100, \mu = 280, p1 = 3\text{Н/см}^2, p2 = 8\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 3.012553001, \sigma_2 = 7.965182726$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	2.655781942	7.13900963
392	2.787995713	7.497441537
648	2.829735968	7.610660212

$d = 100, \mu = 280, p1 = 10\text{Н/см}^2, p2 = 5\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 9.955997527, \sigma_2 = 5.020824567$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	8.923592466	4.426106435
392	9.371621337	4.646439424
648	9.513141285	4.715998829

$d = 1000, \mu = 280, p1 = 1\text{Н/см}^2, p2 = 2\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 1.000845834, \sigma_2 = 1.998299619$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	0.8881799062	1.779188403
392	0.9325516026	1.868222098
648	0.9465629777	1.896339475

$d = 1000, \mu = 280, p1 = 3\text{Н/см}^2, p2 = 8\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 3.012806317, \sigma_2 = 7.965846747$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	2.655989735	7.139572727
392	2.788224708	7.498062596
648	2.829971871	7.61130017

$d = 1000, \mu = 280, p1 = 10\text{Н/см}^2, p2 = 5\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 9.957129225, \sigma_2 = 5.021400258$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	8.924552244	4.426578632
392	9.372679908	4.646959796
648	9.514232069	4.716534897

Модель Гента

$d = 10, \mu = 2800, p1 = 1\text{Н/см}^2, p2 = 2\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 1.00006126, \sigma_2 = 1.999784118$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	0.8887988608	1.671166716
392	0.9332341197	1.754728011
648	0.947266193	1.781115827

$d = 10, \mu = 2800, p1 = 3\text{Н/см}^2, p2 = 8\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 3.001013137, \sigma_2 = 7.995930649$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	2.665393955	6.721216279
392	2.798596821	7.057340967
648	2.840659563	7.163486871

$d = 10, \mu = 2800, p1 = 10\text{Н/см}^2, p2 = 5\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 9.99460126, \sigma_2 = 5.001533476$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	8.891446512	3.908541749
392	9.336153331	4.103833857
648	9.476589731	4.165502379

$d = 100, \mu = 2800, p1 = 1\text{Н/см}^2, p2 = 2\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 1.000082095, \sigma_2 = 1.999825762$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	0.888816231	1.766388188
392	0.9332532269	1.854713093
648	0.9472858814	1.882605272

$d = 100, \mu = 2800, p1 = 3\text{Н/см}^2, p2 = 8\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 3.001242536, \sigma_2 = 7.996540445$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	2.665584711	7.0709329
392	2.798807109	7.424582888
648	2.840876214	7.536263877

$d = 100, \mu = 2800, p1 = 10\text{Н/см}^2, p2 = 5\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 9.995640634, \sigma_2 = 5.002054813$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	8.892316082	4.384439144
392	9.337112077	4.603527908
648	9.477577536	4.67271119

$d = 1000, \mu = 2800, p1 = 1\text{Н/см}^2, p2 = 2\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 1.000084358, \sigma_2 = 1.999830284$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	0.8888181137	1.776729222
392	0.9332553088	1.865571457
648	0.9472880263	1.893627007

$d = 1000, \mu = 2800, p1 = 3\text{Н/см}^2, p2 = 8\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 3.001267454, \sigma_2 = 7.996606684$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	2.665605427	7.108910806
392	2.798829943	7.464463882
648	2.840899738	7.576745929

$d = 1000, \mu = 2800, p1 = 10\text{Н/см}^2, p2 = 5\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 9.995753546, \sigma_2 = 5.002111448$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	8.892410544	4.436118916
392	9.337216223	4.657791686
648	9.477684853	4.727790985

$d = 10, \mu = 280, p1 = 1\text{Н/см}^2, p2 = 2\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 1.000614376, \sigma_2 = 1.997839654$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	0.8879880648	1.671667988
392	0.9323400971	1.755280633
648	0.9463450987	1.781685237

$d = 10, \mu = 280, p1 = 3\text{Н/см}^2, p2 = 8\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 3.01009232, \sigma_2 = 7.95986352$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	2.653911296	6.732187502
392	2.785935482	7.069438147
648	2.8463450987	7.321564923

$d = 10, \mu = 280, p1 = 10\text{Н/см}^2, p2 = 5\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 9.94582108, \sigma_2 = 5.015558108$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	8.914814671	3.885266726
392	9.36193808	4.078163958
648	9.503162729	4.139051645

$d = 100, \mu = 280, p1 = 1\text{Н/см}^2, p2 = 2\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 1.000823146, \sigma_2 = 1.998254549$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	0.8881611101	1.7673318
392	0.9325308817	1.855753524
648	0.9465416289	1.883677265

$d = 100, \mu = 280, p1 = 3\text{Н/см}^2, p2 = 8\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 3.012553412, \sigma_2 = 7.965196915$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	2.655786207	7.088725847
392	2.78800056	7.444204794
648	2.829741009	7.556482038

$d = 100, \mu = 280, p1 = 10\text{Н/см}^2, p2 = 5\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 9.956020746, \sigma_2 = 5.020825426$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	8.923594452	4.361375953
392	9.371623064	4.578085056
648	9.513142911	4.646492286

$d = 1000, \mu = 280, p1 = 1\text{Н/см}^2, p2 = 2\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 1.000845832, \sigma_2 = 1.998299635$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	0.8881799119	1.777719728
392	0.9325516092	1.866663591
648	0.9465629843	1.894752274

$d = 1000, \mu = 280, p1 = 3\text{Н/см}^2, p2 = 8\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 3.012805768, \sigma_2 = 7.965848578$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	2.655990253	7.127430541
392	2.788225326	7.484887582
648	2.829972521	7.597790344

$d = 1000, \mu = 280, p1 = 10\text{Н/см}^2, p2 = 5\text{Н/см}^2, \sigma_1 = 9.957131822, \sigma_2 = 5.021399219$

п треугольников	Численная σ_1	Численная σ_2
128	8.924550695	4.413049697
392	9.372678047	4.632341505
648	9.5142301	4.701564293

4.3. Зависимость относительной ошибки от параметров.

Для неогукковского материала.

Рассмотрим относительную ошибку при параметрах: $d = 10$, $\mu = 2800$, $p_1 = 1\text{Н/см}^2$, $p_2 = 2\text{Н/см}^2$ на сетке из 128 треугольников.

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma^*_1|}{|\sigma^*_1|} = \frac{|0,8887971687 - 1,000055575|}{1,000055575} = 0,111252223$$

$$\frac{|\sigma_2 - \sigma^*_2|}{|\sigma^*_2|} = \frac{|1,777876578 - 1,99979363|}{1,99979363} = 0,11096997$$

При измельчении сетки вдвое:

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma^*_1|}{|\sigma^*_1|} = \frac{|0,9410736418 - 1,000059233|}{1,000059233} = 0,05898209$$

$$\frac{|\sigma_2 - \sigma^*_2|}{|\sigma^*_2|} = \frac{|1,882463709 - 1,999780051|}{1,999780051} = 0,05866462$$

При измельчении сетки втрое:

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma^*_1|}{|\sigma^*_1|} = \frac{|0,9598930168 - 1,000059233|}{1,000059233} = 0,04016383$$

$$\frac{|\sigma_2 - \sigma^*_2|}{|\sigma^*_2|} = \frac{|1,920115244 - 1,999780051|}{1,999780051} = 0,03983678$$

И при других параметрах: $d = 1000$, $\mu = 2800$, $p_1 = 1\text{Н/см}^2$, $p_2 = 2\text{Н/см}^2$ на сетке из 128 треугольников.

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma^*_1|}{|\sigma^*_1|} = \frac{|0,8888181142 - 1,000079149|}{1,000079149} = 0,11125444$$

$$\frac{|\sigma_2 - \sigma^*_2|}{|\sigma^*_2|} = \frac{|1,777918485 - 1,999840762|}{1,999840762} = 0,11097334$$

При измельчении сетки вдвое:

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma^*_1|}{|\sigma^*_1|} = \frac{|0,9410971276 - 1,000084358|}{1,000084358} = 0,05898225$$

$$\frac{|\sigma_2 - \sigma^*_2|}{|\sigma^*_2|} = \frac{|1,882510695 - 1,999830284|}{1,999830284} = 0,05866477$$

При измельчении сетки втрое:

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma_1^*|}{|\sigma_1^*|} = \frac{|0,959917449 - 1,000084358|}{1,000084358} = 0,04016352$$

$$\frac{|\sigma_2 - \sigma_2^*|}{|\sigma_2^*|} = \frac{|1,920164126 - 1,999830284|}{1,999830284} = 0,03983645$$

Для модели Гента.

Рассмотрим относительную ошибку при параметрах: $d = 10$, $\mu = 2800$, $p_1 = 1\text{Н/см}^2$, $p_2 = 2\text{Н/см}^2$ на сетке из 128 треугольников.

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma_1^*|}{|\sigma_1^*|} = \frac{|0,8887988608 - 1,000079149|}{1,000079149} = 0,11125222$$

$$\frac{|\sigma_2 - \sigma_2^*|}{|\sigma_2^*|} = \frac{|1,671166716 - 1,999840763|}{1,999840763} = 0,16433201$$

При измельчении сетки вдвое:

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma_1^*|}{|\sigma_1^*|} = \frac{|0,9410736418 - 1,000079149|}{1,000079149} = 0,05900083$$

$$\frac{|\sigma_2 - \sigma_2^*|}{|\sigma_2^*|} = \frac{|1,769474141 - 1,999840763|}{1,999840763} = 0,11519248$$

При измельчении сетки втрое:

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma_1^*|}{|\sigma_1^*|} = \frac{|0,9598930168 - 1,000079149|}{1,000079149} = 0,04018295$$

$$\frac{|\sigma_2 - \sigma_2^*|}{|\sigma_2^*|} = \frac{|1,804864882 - 1,999840763|}{1,999840763} = 0,09749570$$

И при других параметрах: $d = 1000$, $\mu = 2800$, $p_1 = 1\text{Н/см}^2$, $p_2 = 2\text{Н/см}^2$ на сетке из 128 треугольников.

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma_1^*|}{|\sigma_1^*|} = \frac{|0,8888181137 - 1,000084358|}{1,000084358} = 0,11125222$$

$$\frac{|\sigma_2 - \sigma_2^*|}{|\sigma_2^*|} = \frac{|1,776729222 - 1,999830284|}{1,999830284} = 0,11156465$$

При измельчении сетки вдвое:

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma_1^*|}{|\sigma_1^*|} = \frac{|0,9410971274 - 1,000084358|}{1,000084358} = 0,05898225$$

$$\frac{|\sigma_2 - \sigma_2^*|}{|\sigma_2^*|} = \frac{|1,881249553 - 1,999830284|}{1,999830284} = 0,05929539$$

При измельчении сетки втрое:

$$\frac{|\sigma_1 - \sigma_1^*|}{|\sigma_1^*|} = \frac{|0,959917451 - 1,000084358|}{1,000084358} = 0,04016351$$

$$\frac{|\sigma_2 - \sigma_2^*|}{|\sigma_2^*|} = \frac{|1,918877058 - 1,999830284|}{1,999830284} = 0,04048004$$

Можно провести анализ порядка сходимости для материалов, фиксируя различные параметры и изменяя другие.

Для неогукковского материала:

$$d = 10 \mu = 2800 \quad p1 = 1 \text{Н/см}^2, \quad p2 = 2 \text{Н/см}^2$$

n	$ \sigma_1 - \sigma_1^* $	Порядок сходимости	$ \sigma_2 - \sigma_2^* $	Порядок сходимости
h	0,142996		0,285423	
h/2	0,0770797	0,89155193	0,153525	0,89462799
h/4	0,040167	0,94034024	0,0796619	0,94651181

$$d = 1000 \mu = 2800 \quad p1 = 1 \text{Н/см}^2, \quad p2 = 2 \text{Н/см}^2$$

n	$ \sigma_1 - \sigma_1^* $	Порядок сходимости	$ \sigma_2 - \sigma_2^* $	Порядок сходимости
h	0,142999		0,28543	
h/2	0,0770816	0,89154663	0,153529	0,89462579
h/4	0,040168	0,94033989	0,0796639	0,94651318

$$d = 100 \mu = 280 \quad p1 = 1 \text{Н/см}^2, \quad p2 = 2 \text{Н/см}^2$$

n	$ \sigma_1 - \sigma_1^* $	Порядок сходимости	$ \sigma_2 - \sigma_2^* $	Порядок сходимости
h	0,144278		0,282859	
h/2	0,07851	0,877903	0,150665	0,90873876
h/4	0,0416832	0,91341039	0,0766295	0,97537252

$$d = 100 \mu = 2800 \quad p1 = 1 \text{Н/см}^2, \quad p2 = 2 \text{Н/см}^2$$

n	$ \sigma_1 - \sigma_1^* $	Порядок сходимости	$ \sigma_2 - \sigma_2^* $	Порядок сходимости
h	0,142999		0,285429	
h/2	0,0770814	0,89155038	0,153529	0,89462073
h/4	0,0401679	0,94033974	0,0796637	0,9465168

$$d = 1000 \mu = 2800 \quad p1 = 3 \text{Н/см}^2, \quad p2 = 8 \text{Н/см}^2$$

N	$ \sigma_1 - \sigma_1^* $	Порядок сходимости	$ \sigma_2 - \sigma_2^* $	Порядок сходимости
h	0,430702		1,13716	
h/2	0,233147	0,88545016	0,609034	0,90084058
h/4	0,122521	0,92821082	0,313271	0,95911155

$$d = 1000 \mu = 2800 \quad p1 = 10 \text{Н/см}^2, \quad p2 = 1 \text{Н/см}^2$$

n	$ \sigma_1 - \sigma_1^* $	Порядок сходимости	$ \sigma_2 - \sigma_2^* $	Порядок сходимости
h	0,90712945		0,144136	

h/2	0,754947	0,90712945	0,0783501	0,87942369
h/4	0,384862	0,97203413	0,041513	0,91637192

Для модели Гента:

$$d = 10 \mu = 2800 \quad p_1 = 1 \text{Н/см}^2, \quad p_2 = 2 \text{Н/см}^2$$

n	$ \sigma_1 - \sigma_1^* $	Порядок сходимости	$ \sigma_2 - \sigma_2^* $	Порядок сходимости
h	0,14299628		0,288324405	
h/2	0,077079807	0,891552744	0,174345032	0,725747703
h/4	0,040167061	0,940340041	0,094916358	0,877216605

$$d = 1000 \mu = 2800 \quad p_1 = 1 \text{Н/см}^2, \quad p_2 = 2 \text{Н/см}^2$$

n	$ \sigma_1 - \sigma_1^* $	Порядок сходимости	$ \sigma_2 - \sigma_2^* $	Порядок сходимости
h	0,142999272		0,286575626	
h/2	0,077081594	0,89154949	0,154765285	0,888834006
h/4	0,040168032	0,940338627	0,080950963	0,934961747

$$d = 100 \mu = 280 \quad p_1 = 1 \text{Н/см}^2, \quad p_2 = 2 \text{Н/см}^2$$

n	$ \sigma_1 - \sigma_1^* $	Порядок сходимости	$ \sigma_2 - \sigma_2^* $	Порядок сходимости
h	0,144278362		0,294244431	
h/2	0,07850995	0,877907532	0,162951345	0,852573845
h/4	0,041683164	0,913410729	0,089422148	0,865737149

$$d = 100 \mu = 2800 \quad p_1 = 1 \text{Н/см}^2, \quad p_2 = 2 \text{Н/см}^2$$

n	$ \sigma_1 - \sigma_1^* $	Порядок сходимости	$ \sigma_2 - \sigma_2^* $	Порядок сходимости
h	0,142998978		0,296543068	
h/2	0,077081422	0,891549751	0,165499854	0,841411708
h/4	0,040167944	0,940338579	0,092115154	0,845319521

$$d = 1000 \mu = 2800 \quad p_1 = 3 \text{Н/см}^2, \quad p_2 = 8 \text{Н/см}^2$$

n	$ \sigma_1 - \sigma_1^* $	Порядок сходимости	$ \sigma_2 - \sigma_2^* $	Порядок сходимости
h	0,430704812		1,141979467	
h/2	0,233148614	0,885449588	0,614281481	0,894564916
h/4	0,12252227	0,928205851	0,31876076	0,946425849

$$d = 1000 \mu = 2800 \quad p_1 = 10 \text{Н/см}^2, \quad p_2 = 1 \text{Н/см}^2$$

n	$ \sigma_1 - \sigma_1^* $	Порядок сходимости	$ \sigma_2 - \sigma_2^* $	Порядок сходимости
h	1,415768296		0,150536336	
h/2	0,754952826	0,907126771	0,085432928	0,817247636
h/4	0,384865544	0,972031984	0,048989993	0,802305144

Из приведенных результатов можно сделать вывод, что порядок сходимости изменяется от 0,726 до 0,972, при чем самые худшие результаты мы наблюдаем при $d = 10$,

т.е. чем более несжимаемый материал, тем лучше порядок сходимости. Аналогичные выводы можно сделать для μ . Изменение давление не сильно влияют.

Заключение.

Основной целью данной работы является исследование подхода на основании метода конечных элементов, предложенного в [4], в случае двух гиперупругих материалов, которые более корректно описывают механическое поведение мягких тканей.

В случае материала Сен-Венана-Кирхгофа была решена задача о сжатии мембраны под действием давления на верхней грани. Полученные результаты согласуются с соответствующими в работе [4].

Были получены аналитические выражения для узловых сил и матриц жесткости в случае неогукковского материала и модели материала Гента, используя которые была рассмотрена задача о двухосном растяжении нелинейной мембраны. Была написана программа на языке C с использованием пакетов UMFPACK и `api2d` для решения линейных систем прямыми и итерационными методами с различными предобуславливателями. Проведены численные эксперименты для задачи о двухосном растяжении, совпадающие с аналитическими данными.

Список литературы

[1] Delingette H., Ayache N. Soft tissue modeling for surgery simulation //Computational models for the human body. – 2004. – Т. 12. – С. 453-550.

[2] San-Vicente-Otamendi G. Designing deformable models of soft tissue for virtual surgery planning and simulation using the Mas-Spring Model. – 2011.

[3] Heimann T. et al. Subject-specific ligament models: Toward real-time simulation of the knee joint //Computational Biomechanics for Medicine. – Springer New York, 2010. – С. 107-119.

[4] Delingette H. Triangular springs for modeling nonlinear membranes //Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on. – 2008. – Т. 14. – №. 2. – С. 329-341.